研究タイトル：

代数群の有理性問題とハッセ原理の研究

氏名：	金井　和貴　／　Kazuki Kanai	E-mail：	k-kanai@lire-nct.ac.jp
職名：	助教	学位：	博士(理学)
所属学会・協会：	日本数学会		

キーワード：	整数論，有理性問題，ハッセ原理，代数的トーラス
技術相談 提供可能技術：	・代数体及び代数群の整数論に関すること ・計算機を用いた数学に関すること ・高専数学の内容及び教材に関すること

研究内容：

＜素数の世界、整数の世界＞

整数がひとつ与えられたとき、素因数分解により、それは素数の積に分解される。 このような意味で“素数は整数の世界の原子である”とよく喩えられる。 整数を知りたいと考えるときに、原子である素数たちそれぞれのことを知ることによって、それをなそうというのは自然な発想であろう。 Gauss は合同関係に着目すると素数たちが相互に関係しあうことに気づいた。 特に 1801 年に『数論研究(Disquisitiones Arithmeticae)』において、平方剰余の相互法則に対して何種類もの証明を与えた。 以後、相互法則を中心とした研究が昨今では代数的整数論と呼ばれる分野を形成していった。

さて、素数たちが相互に関係することを踏まえ、その原子たちから整数の情報を復元しようとするときに、どのような問題が発生するであろうか。 実は問題が起きず、素数の世界の情報を束ね合わせれば整数の世界の情報が復元されることもある。 特に、整数係数の二次形式（例えば、$ax^2+bxy^2+cz^2, abc\neq 0$など）が有理数の世界で解を持つことと、すべての素数の世界で解を持つことは等価となる。しかしながら、三次以上の形式ではこのようなことは成り立たない(例えば、セルマーが挙げた対角型三次形式$3x^3+4y^3+5z^3$はすべての素数の世界で解を持つが、整数の世界では解を持たない)。

二つの世界の往来を妨げるものを「障害(Obstruction)」と呼び、障害が存在しないときに「ハッセ原理が成立する」という。 **障害が、いつ、どのくらい現れるのかを決定することが数論幾何における大きな問題となっている。**

＜ノルム形式＞

代数体の拡大において、(複素数におけるノルムのように)元の大きさを測る写像ノルム写像が定義される。 この写像から誘導される形式を「ノルム形式」という。 ノルム形式を調べることは、ノルム 1 トーラスと呼ばれる代数群(代数多様体＋群構造)を調べることと等価となる。 **執筆者は特にこのノルム 1 トーラスについて研究を行い、拡大次数が 15 次以下の拡大に対し、ノルム形式におけるハッセ原理の成立の可否を決定した。** その過程において重要となるのが、代数多様体に対しての問題である「有理性問題」である。 有理性問題は与えられた代数多様体が、最も基本的な代数多様体である射影空間と同型になるかを判定する問題である。 その歴史は古く19 世紀まで遡るが、非常に困難な問題であり、現代においても完全解決にはほど遠い。 しかしながら、ノルム 1 トーラスが属する代数的トーラスと呼ばれるクラスに対しては、有理性を弱めた安定有理性、さらに弱めたレトラクト有理性の決定手法が比較的多い。 また、ノルム 1 トーラスに対しては、レトラクト有理性からノルム形式のハッセ原理が従う。 これを踏まえ**執筆者は計算機上で、ノルム 1 トーラスのノルム形式に対するハッセ原理を決定する方法を提案し実装を行った。**

【執筆者の研究】

1. Norm one tori and Hasse norm principle, Mathematics of Computation 91 (2022) 2431–2458.
2. Norm one tori and Hasse norm principle, II: Degree 12 case, Journal of Number Theory 244 (2023) 84–110.

提供可能な設備・機器： なし

名称・型番（メーカー）	