研究タイトル：

特異点をもつ曲面の微分幾何

校長

氏名：	山田 光太郎 ／ YAMADA Kotaro	E-mail：	kotaro@numazu-ct.ac.jp
職名：	校長	学位：	博士（理学）
所属学会・協会：	日本数学会、日本応用数理学会		

キーワード：	曲面，曲率，特異点，ローレンツ幾何，微分幾何
技術相談 提供可能技術：	・数理科学全般 ・数学教育 ・古典微分幾何学 ・ローレンツ幾何学

研究内容：

微分幾何，とくに曲面論の周辺の研究を行っている．ガウスに始まるとされる曲面の微分幾何学では，空間内の曲面の「形」を表現する量として「曲率」の概念が重要な役割を果たしている．その中でも平均曲率とよばれる量は曲面（膜）の表面張力と関係しており，平均曲率が零である曲面は石鹸膜の形の数理モデルとして知られている．このような曲面は極小曲面とよばれ，19 世紀から幾何学の重要な研究課題であった．Frei Otto によるミュンヘンのオリンピックスタジアムの屋根は極小曲面を用いてデザインされていることはよく知られている．

極小曲面論初期のエポックメイキングな成果は，このような曲面が複素解析的なデータで厳密に表示できる，というワイエルストラスの表現公式であろう．広汎な複素解析学の知見を用いて極小曲面論の研究は進化していった．曲面が存在している空間を取り替え（空間に曲がりを与え）たり，平均曲率零とは異なる条件を考えることで，様々なクラスの曲面にワイエルストラス表現と類似の表現公式が考えられる．1990 年代から 21 世紀はじめにかけて，我々は「3 次元双曲空間の平均曲率 1 の曲面」のワイエルストラス型表現公式を用いて，このクラスの曲面の精緻な理論を築いた．これと並行して多様なクラスの曲面に関する表現公式を考察していたが，これらのクラスでは多くの場合，曲面に自然に「特異点」と呼ばれる「なめらかでない」点が現れる．このように曲面に特異点が現れる現象は，たとえばベルトラミの擬球面のように 19 世紀にはすでによく知られていた．また，特殊相対論の模型であるところのローレンツ・ミンコフスキー空間の平均曲率零曲面でも自然に特異点が出てくることが知られている．我々は，これらの特異点の微分幾何学的性質を表す量を与え「特異点の微分幾何学」を深化させた．

これらの成果は古典微分幾何学の継承と発展とみなせる．生活の至るところに現れる曲面とその特異点であるが，古典微分幾何学でまだ扱えるところがあるように思われる．さらに，ある種の曲面はその「可積分性」により「よい」離散化を持つことが知られてきている．曲面の実装と離散化は切り離せない話題であり，注目すべき話題と考える．

参考文献：

梅原雅顕・山田光太郎「曲線と曲面---微分幾何的アプローチ」（改訂版），2005，裳華房

梅原雅顕・佐治健太郎・山田光太郎「特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学」，2017，丸善出版

提供可能な設備・機器：

名称・型番（メーカー）	

Differential Geometry of Surfaces with Singularities

Name	YAMADA Kotaro	E-mail	kotaro@numazu-ct.ac.jp
Status	Principal		
Affiliations	The Mathematical Society of Japan The Japan Society of Industrial and Applied Mathematics		

Keywords	surfaces, curvature, singularities, differential geometry
Technical Support Skills	・Mathematical sciences ・Math education ・Classical differential geometry ・Lorentzian geometry

Research Contents

I conduct research in differential geometry, particularly in the field of surface theory. In the differential geometry of surfaces—a field said to have originated with Gauss—the concept of “curvature” plays a crucial role as a quantity that describes the “shape” of a surface in space. Among these, a quantity known as mean curvature is related to the surface tension of a surface (membrane), and surfaces with zero mean curvature are known as mathematical models of soap films. Such surfaces are called minimal surfaces and have been a major research topic in geometry since the 19th century. It is well known that the Olympic Stadium in Munich, designed by Frei Otto, was designed using minimal surfaces.

An epoch-making achievement in the early days of minimal surface theory was Weierstrass representation formula, which states that such surfaces can be represented by complex analytic data. Research in the theory of minimal surfaces has evolved through the application of extensive knowledge from complex analysis. By changing the ambient space (giving the space curvature) or considering conditions other than zero mean curvature, representation formulas similar to the Weierstrass representation can be devised for various classes of surfaces. From the 1990s through the early 21st century, we built a theory for this class of surfaces using the Weierstrass-type representation formula for “surfaces of mean curvature 1 in 3-dimensional hyperbolic space.” In parallel, we were examining representation formulas for diverse classes of surfaces; however, in these classes, “singularities”—non-smooth points—often naturally appear on the surfaces. The phenomenon of singularities appearing on surfaces was already well known in the 19th century, for example, in the case of Beltrami’s pseudosphere. It is also known that singularities naturally arise on surfaces of mean curvature zero in Lorentz-Minkowski space, which serves as a model for special relativity. We have defined quantities that characterize the differential geometric properties of these singularities, thereby deepening the field of “differential geometry of singularities.”

These results can be regarded as a continuation and development of classical differential geometry. Although surfaces and their singularities appear everywhere in daily life, it seems there are still areas where classical differential geometry can be applied. Furthermore, it has become known that certain types of surfaces possess “good” discretizations due to their “integrability”. The implementation and discretization of surfaces are inseparable topics, and we consider them to be worthy of attention.

References:

M. Umehara and K. Yamada, Differential Geometry of Curves and Surfaces, World Scientific, 2021.

M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, Differential Geometry of Curves and Surfaces with Singularities, World Scientific, 2021.

Available Facilities and Equipment
