所属： 一関工業高等専門学校　総合科学自然科学領域

研究タイトル：

代数幾何学と整数論の研究

氏名：	佐藤　一樹　／　Sato Kazuki	E-mail：	kazuki-s@ichinoseki.ac.jp
職名：	講師	学位：	博士（理学）

所属学会・協会：	日本数学会
キーワード：	代数多様体、有理点、代数的サイクル、局所大域原理
技術相談 提供可能技術：	・代数学全般 ・代数幾何学、整数論、可換環論

研究内容： 代数多様体の整数論の研究

代数多様体とは、多項式から定まる方程式

$$f_1(x_1, \dots, x_m) = \cdots = f_k(x_1, \dots, x_m) = 0$$

の解の集合のことです。私は特に多項式の係数が整数の場合に興味を持ち研究しています。整数係数多項式から定まる方程式の整数解や有理数解を求める問題をディオファントス問題といい、非常に古くから多くの研究がなされいる歴史のある問題です。一般に整数係数多項式の方程式を与えたとき、その整数解や有理数解をすべて決定する事は簡単ではありません。ましてや、有理数解があるかどうかを判定するアルゴリズムが存在するかどうかすら明らかになっていません（多項式を入力し、「整数」解があるかどうかを出力する一般的アルゴリズムが存在しないことは証明されている）。これがディオファントス問題を難しく、また魅力的な問題にしている理由の一つです。

私の研究テーマの一つは二次形式

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_mx_m^2 = 0$$

です。整数係数の二次形式が有理数解をもつかどうかは局所大域原理によって判定できます。すなわち、実数体上の方程式と、（有限個の）素数 p に対して mod p した方程式が解を持てば、二次形式は有理数解を持ちます。私の興味は、二次形式の係数が有理関数のパラメータを持つ場合です。例えば、パラメータの変数が一つの場合、幾何学的には代数曲線上の二次超曲面束に対応します。このような二次形式の有理数解について、代数幾何学の理論や、二次形式の代数的理論などを用いて研究します。

私の別の研究テーマは三次形式です。つまり、定義方程式が3次多項式の場合です。二次形式の場合と異なり、局所大域原理は一般に成り立たないので、有理数解を見つけることは格段に難しくなります。3変数3次形式は楕円曲線になります。楕円曲線は暗号理論にも用いられています。4変数3次式になると、有理数解についての一般論はほとんどありません。有理数解の存在を判定するアルゴリズムも知られていません。三次曲面のブラウワー群を用いると、局所大域原理の障害（ブラウワー・マニン障害）が計算できます。ブラウワー・マニン障害がない三次曲面の有理点の存在について研究しています。また、三次曲面に有理点がある場合、それがどのくらいあるかという定量的研究もなされています。特に三次曲面上の有理点の高さ関数に関する分布と、三次曲面の幾何学的不変量との関係を調べています。また、三次曲面に限らず、Fano 多様体や K3 曲面の有理点にも興味を持っています。

提供可能な設備・機器：

名称・型番（メーカー）	

Arithmetic and algebraic geometry

Name	Sato Kazuki	E-mail	kazuki-s@ichinoseki.ac.jp
Status	Lecturer		
Affiliations	The mathematical society of Japan		

Keywords	Algebraic variety, rational points, algebraic cycles, local-to-global principle
Technical Support Skills	・Algebra ・Algebraic geometry, number theory, commutative ring theory ・

Research Contents — Arithmetic of algebraic varieties

An algebraic variety is a set of solutions of the equation

$$f_1(x_1, \dots, x_m) = \cdots = f_k(x_1, \dots, x_m) = 0$$

defined by some polynomials. I am especially interested in polynomials with integer coefficients. Diophantine problems, which have a long history, deal with integral or rational solutions for polynomial equations with integer coefficients. Given a polynomial equation with integer coefficients as above, it is too difficult to determine its all integral or rational solutions. Moreover, it is not known whether there exists an algorithm to determine a given polynomial equation to have a rational solution (it is known that there does not exist any algorithm to determine a given polynomial equation to have an INTEGER solution). So Diophantine problems have attracted many mathematicians.

One of my research interest is quadratic forms;

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_mx_m^2 = 0.$$

For any integral quadratic form, the local-to-global principle for the existence of rational points holds, that is, it has a rational solution if and only if it has a real solution and the equation modulo p has a solution for any prime number p. My interest is quadratic forms with coefficients of rational (or algebraic) functions. This means that the quadratic form defines a quadric hypersurface bundle structure over some variety. I study arithmetic of such quadratic forms using the theory of algebraic geometry or the algebraic theory of quadratic forms.

Another interest is cubic forms, that is, equations defined by polynomials of degree 3. For cubic forms, the local-to-global principle does not hold in general. A nonsingular cubic form with three variables is an elliptic curve, for which there is a vast and beautiful theory. There is also an application to cryptography. For cubic forms with four or more variables, it is hard to see a rational solution. Using the Brauer group of a cubic surface, we can define an obstruction (Brauer-Manin obstruction) to the local-to-global principle for the existence of rational points. I study rational points on cubic surfaces with no Brauer-Manin obstruction. On the other hand, when the cubic surface has a rational point, we can study the asymptotic behavior of rational points on the surface with respect to the height function. Other than cubic surfaces, I am interested in rational points on Fano varieties or K3 surfaces.

Available Facilities and Equipment
