

# 研究タイトル：B 上の空間のなす圏における L-S カテゴリーの研究



氏名：	酒井 道宏 / SAKAI Michihiro	E-mail:	sakai@kurume-nct.ac.jp
職名：	教授	学位：	博士（数理学）
所属学会・協会：	日本数学会		
キーワード：	Fibrewise Homotopy Theory, L-S カテゴリー, 連続関手, Hopf 不変量		
技術相談 提供可能技術：			

## 研究内容：B 上の空間のなす圏における L-S カテゴリーの研究

### 1. 研究の背景

球面のホモトピー群は『2つの球面の間の連続写像で、本質的に異なるものが何個存在するか?』という重要な問題と関連しているため、多くのトポロジストに研究されている。1930年代にHopfが構成したホモトピー不変量(Hopf不変量)は、1950年以降にJames、戸田らによって拡張され、多くの空間のホモトピー群が計算出来るようになった。この一般化である高次Hopf不変量は、Bernstein-Hilton、岩瀬らによって(空間の可縮な開被覆の最小数)-1で定まるL-Sカテゴリーを決定するための障害を与えることが示された。その計算は、球面やトーラスといった空間は容易だが、Lens空間のような重要な空間さえ十分な評価が出来ない。

1980年代、Jamesによって、位相空間の圏の拡張であるB上の空間の圏が提唱された。この上でホモトピー論を展開するには、ファイバー空間のような条件が必要となる。ファイバー空間から構成される懸垂空間やループ空間などは再びファイバー空間となるが、複雑な空間ではわからない。この『ファイバー空間から構成される空間が再びファイバー空間となるか?』という問題は、連続関手の観点からは『位相空間の上の連続関手は、ファイバー空間を保ちB上の空間に拡張できるか?』と言い換えられる。Jamesは、ある条件の下でその解答を与えているが構成が自然でなく、ループ関手は条件を満たしていない。また、それがファイバー空間を保つかもわからない。B上の空間のL-Sカテゴリーについては、通常のL-Sカテゴリーとの関係がわからないため、評価が不十分である。

### 2. 研究課題

#### 2-1. B上の空間の $A_\infty$ -空間とL-Sカテゴリー

Ganea, Gilbert, 岩瀬らはL-Sカテゴリーがループ空間の射影空間と密接な関係を持つことを発見した。Bernstein-Hilton, 岩瀬らはこれを用いて高次Hopf不変量を導入し、計算可能な上からの評価を与えた。本課題では、ホモトピー・ブルバックとプッシュアウトの関係性をB上の空間に拡張し、B上のループ空間に関するB上の $A_\infty$ 構造を与える。次に、B上の空間のループ空間の射影空間とB上の空間のL-Sカテゴリーを対応づける。

#### 2-2. Topological complexityとB上の空間のL-Sカテゴリー

空間がどれ位の複体を必要とするかを調べる道具であるTopological complexityは、Farfarによってロボットアームの動作方法の配置空間上で考えられたものである。

一方、B上の空間のL-Sカテゴリーは、(B上の空間のファイバーワイズに可縮な開被覆の最小数)-1であるが、計算方法があまりなく判定が困難である。本課題では、Topological complexityとB上の空間に対するL-Sカテゴリーを対応させる。

#### 2-3. B上の空間のなす圏における連続関手

B上の空間のなす圏は、位相空間のなす圏とよく似た性質を持つことが知られている。ただし、そこには連続関手の自然な拡張が与えられていない。本課題では、B上の空間のなす圏に対して、位相空間のなす圏上の連続関手を拡張する。これが出来れば、B上の写像空間、写像錐、約積空間、局所化などが連続関手であることがわかる。

### 3. これまでの研究成果

論文[10]では、B上のファイバー空間から導かれたループ懸垂空間と約積空間がホモトピー同値となることを示してB上のファイバー空間の間の写像に関してJames-Hopf不変量を拡張した。論文[9]では、各単体上で自明となるような多面体上のファイバー空間に対して、位相空間のなす圏上の任意の連続関手を自然に拡張し、これが準ファイバー空間を保つことが示された。論文[7]ではこれを用いてB上の空間に $A_\infty$ 構造とL-Sカテゴリーを関連付けることができた。その応用として、クラインの壺を1次元球面上の球面束とみたときのB上のL-Sカテゴリーの値が2となることを示した。論文[6],[8]では、Topological complexityとB上の空間に対するL-Sカテゴリーを対応させ、評価を与えることができた。また、近年は教育活動に注力しており、複素数の応用や先端的な数学分野である結び目理論を本校の学生に提供したり、中学生向けの公開講座でもL-Sカテゴリーや結び目理論の話題を提供している(論文[1],[2],[3],[4],[5])。

### 4. 参考文献

- [1]平成27年 K. Kawashima, M. Sakai, T. Tanaka, Y. Matsuda, A practice of deep learning about mathematics using knot theory, Transactions of the 9th International Symposium on Advances in Technology Education, (2015), pp. 377-382.
- [2]平成26年 M. Sakai, T. Tanaka, Development of Teaching Materials Aimed for Relevance on Learning Mathematics by the Medium of Complex Numbers, Proceedings of 8th International Symposium on Advances in Technology Education, 5pages(2014).
- [3]平成26年 川嶋克利, 酒井道宏, 田中利史, 結び目と行列を用いた中等教育向け数学教材の実践, 岐阜数学教育研究, 2014, Vol. 13, pp. 1-11.
- [4]平成25年 M. Sakai, T. Miyaji, Various efforts to improve motivation to learn mathematics, ATINER'S Conference Paper Series, MAT2013-0572(2013), pp.5-13.
- [5]平成25年 酒井道宏, 田中利史, 合同式と結び目を用いた中等教育向けの数学教材の開発及び実践, 岐阜数学教育研究, 2013, Vol.12, pp. 34-41.
- [6]平成24年 N. Iwase, M. Sakai, Erratum to "Topological complexity is a fibrewise L-S category", Topology and its Applications. 159(2012), no. 10-11, pp. 2810-2813.
- [7]平成22年 M. Sakai,  $A_\infty$ -spaces and L-S category in the category of fibrewise spaces, Topology and its Applications, 157 (2010), pp. 2131-2135.
- [8]平成22年 N. Iwase, M. Sakai, Topological complexity is a fibrewise L-S category, Topology and its Applications, 157 (2010), pp.10-21.
- [9]平成20年 N. Iwase, M. Sakai, Functors on the category of quasi-fibrations, Topology and its Applications, 155 (2008), pp.1403-1409.
- [10]平成20年 M. Sakai, On the Hopf-James homomorphism over B, Quaestiones Mathematicae, 31 (2008), pp. 1-9.

## 提供可能な設備・機器：

### 名称・型番（メーカー）

名称・型番（メーカー）	