# 研究タイトル：行列の固有値と固有ベクトルを求める



| | | | |
|---|---|---|---|
| 氏名： | 高木和久 ／ TAKAGI Kazuhisa | E-mail： | ktakagi@ge.kochi-ct.ac.jp |
| 職名： | 准教授 | 学位： | 理学修士（名古屋大学） |
| 所属学会・協会： | 日本数学教育学会 | | |
| キーワード： | 行列の固有値、固有ベクトル、対角化、べき乗の計算 | | |
| 技術相談提供可能技術： | 数学教育 | | |



## 研究内容：固有値を求める問題を瞬殺する

行列の固有値を求めて対角化したりべき乗を求める問題は編入学試験に頻出される。通常は先に固有値を出してから固有ベクトルを見つけるが、先に固有ベクトルを求めることができれば固有値は暗算でも求められる。

【問題 1】$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

【解】Aを単位行列 $E$ の実数倍と非正則な行列の和として次のように表す。

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=4E+\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$は行列Aの固有ベクトルである。なぜなら

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=4E\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$$

だからである。また、$\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}$に直交するベクトルも行列Aの固有ベクトルである。

例えば $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ は$\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}$に直交し、

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=4E\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

より固有値 4 に属する固有ベクトルである。

【問題 2】対称行列 $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ の 2 つの固有ベクトルが直交することを示せ。

【証明】Aは次のように表わされる。

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}-3E$$

$$\therefore A\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}-3E\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$$

これより $\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$ はAの固有ベクトルである。$\vec{a}$を $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$に直交する$\vec{0}$でない任意のベクトルとすると

$$A\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\vec{a}-3E\vec{a}=-3\vec{a}$$

より$\vec{a}$ もAの固有ベクトルである。よってAの 2 つの固有ベクトルは直交する。（証明終）