KOSEN
国立高等専門学校機構

所属：函館工業高等専門学校　社会基盤工学科

研究タイトル：

直交選点法の有限要素化に関する研究

氏名：	大久保　孝樹／OHKUBO　Takaki	E-mail：	ohkubo@hakodate-ct.ac.jp
職名：	教授	学位：	博士（工学）
所属学会・協会：	土木学会，水環境学会，計算工学会，応用数理学会		

キーワード：	直交選点法，有限要素法，移流拡散反応方程式
技術相談 提供可能技術：	・微生物反応における移流拡散反応方程式 ・偏微分方程式の直交選点法による定式化（空間 2 次元領域、非定常） ・直交選点法における有限要素化

研究内容：移流拡散反応方程式の直交選点有限要素法による定式化

1. はじめに

直交選点法は、重み付き残差法の一種であり，直交多項式の根を選点として，その選点における偏微分方程式の残差がゼロになるように，試行関数である直交多項式の係数を求めるものであるが，計算を容易にするため係数を求める代わりに選点での解を求めるように偏微分の係数行列を作成して偏微分方程式を離散化する方法である．直交選点法の利点は，低次の解析でも選点として直交多項式の根を用いているので，ある程度の精度で解析できることである．また，高精度の解を望む場合は高次の直交多項式を用いることになるが，直交選点法の場合は偏微分の係数行列を求めて置きさえすれば，次数の数値を変えるだけで，自動的に高次の計算が可能となる．これは，差分や有限要素法のように高次の計算をする際プログラムのコードを書き直さなければならない手間が全くないという利点を示している．

2. 生物膜の移流拡散反応方程式

【生物膜領域】

$$u\frac{\partial S}{\partial x}+v\frac{\partial S}{\partial y}-D_{xsf}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-D_{ysf}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}+r(S,C)=0$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}-D_{xcf}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-D_{ycf}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+\alpha r(S,C)=0$$

$$r(S,C)=\frac{v_{s\max}S}{K_S+S}\frac{C}{K_C+C}X_f$$

【拡散層領域】

$$u\frac{\partial S}{\partial x}+v\frac{\partial S}{\partial y}-D_{xs}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}-D_{ys}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=0$$

$$u\frac{\partial C}{\partial x}+v\frac{\partial C}{\partial y}-D_{xc}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-D_{yc}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}=0$$

【境界条件の例】

$$\left(uS-D_{xsf}\frac{\partial S}{\partial x}\right)l+\left(vS-D_{ysf}\frac{\partial S}{\partial y}\right)m=0$$

$$\left(uC-D_{xcf}\frac{\partial C}{\partial x}\right)l+\left(vC-D_{ycf}\frac{\partial C}{\partial y}\right)m=0$$

$$\left(uS-D_{xsf}\frac{\partial S}{\partial x}\right)l+\left(vS-D_{ysf}\frac{\partial S}{\partial y}\right)m=\left(uS-D_{xs}\frac{\partial S}{\partial x}\right)l+\left(vS-D_{ys}\frac{\partial S}{\partial y}\right)m$$

$$\left(uC-D_{xcf}\frac{\partial C}{\partial x}\right)l+\left(vC-D_{ycf}\frac{\partial C}{\partial y}\right)m=\left(uC-D_{xc}\frac{\partial C}{\partial x}\right)l+\left(vC-D_{yc}\frac{\partial C}{\partial y}\right)m$$

$$S=S^*$$

$$C=C^*$$

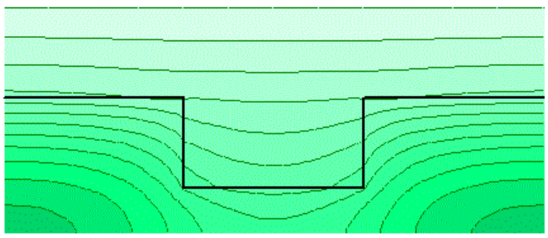
3. 直交選点法による定式化

【微生物膜領域の直交選点法による定式化の例】

$$u_i\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}S_j+v_i\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}S_j-D_{xsf}\sum_{j=1}^{ian}B_{xij}S_j-D_{ysf}\sum_{j=1}^{ian}B_{yij}S_j+\frac{v_{s\max}C_i}{(K_s+S_i)(K_c+C_i)}S_i=0$$

$$u_i\sum_{j=1}^{ian}A_{xij}C_j+v_i\sum_{j=1}^{ian}A_{yij}C_j-D_{xcf}\sum_{j=1}^{ian}B_{xij}C_j-D_{ycf}\sum_{j=1}^{ian}B_{yij}C_j+\frac{\alpha v_{s\max}S_i}{(K_s+S_i)(K_c+C_i)}C_i=0$$

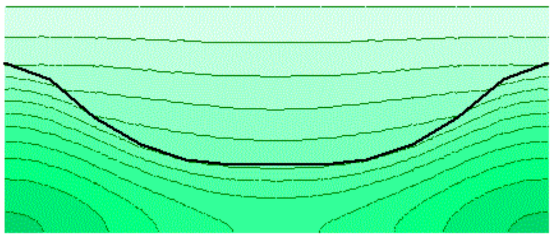
直交選点法では 1 階の微分，2 階の微分がそれぞれ Ax（Ay）および Bx(By)の微分作用素行列で表される．



矩形要素のおける基質濃度プロファイル例

4. 直交選点法の有限要素化

有限要素化では4隅の重ね合わせ（節点接続法）に問題があり，1つの未知数に対して最大4つの条件式が成り立つ．この条件式過剰の問題を解決するために，最小二乗法の概念を用いて1つの条件式を導く．



四角形要素における基質濃度プロファイル例